Ejercicios de Análisis Matemático I – Relación 4

90. Estudia si el campo escalar definido por:

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{arc\,tg} x \operatorname{sen} y - xy}{x^2+y^2}, \quad f(0,0)=0$$

es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$. Calcula $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$ e indica si es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

99. Clasifica los puntos críticos para determinar los extremos relativos de las funciones:

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, \quad f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 3x - 3y - 3z$$

100. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(1,2,3)$ y que forma con los ejes coordenados un tetraedro de volumen mínimo (el volumen del tetraedro es un tercio del área de la base por la altura).

105. Prueba que la definición dada por la igualdad 3.5 es una norma en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ y que se verifican las desigualdades 3.6 y 3.7.

106. Supongamos que $\{\mathbf{S}_n\} \to \mathbf{S}$ en el espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^q)$ y que $\{\mathbf{T}_n\} \to \mathbf{T}$ en el espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Prueba que $\{\mathbf{S}_n \circ \mathbf{T}_n\} \to \mathbf{S} \circ \mathbf{T}$ en el espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^q)$ (se suponen fijadas normas en $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^q$ que inducen las correspondientes normas de operadores).

120. Sea $u = f(x,y)$ donde $x = \mathrm{e}^s \cos t$, $y = \mathrm{e}^s \operatorname{sen} t$. Justifica que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{-2s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

Indica como se evalúan las derivadas parciales en la igualdad anterior.

001 Sean $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\mathbf{F}(x,y) = (\mathrm{e}^x \cos y, \mathrm{e}^y \operatorname{sen} x), \qquad g(u,v) = \mathrm{e}^{uv} \operatorname{sen}(uv)$$

Sea $h = g \circ \mathbf{F}$. Usando la regla de la cadena para derivadas parciales calcula $D_{12}h(0,0)$.

La numeración de los ejercicios salvo el último es la misma que hay en los apuntes del curso.

Para entregar el viernes 11 de enero de 2013.